DEMONSTRATIONES UNIVERSALES ET OCULARES *RATIONIS DIAMETRI AD PERIPHERIAM, UT* 8 : 25.

PROBLEMA I.

1. *Determinare ſummam exceſſus & defectus 2 quantitatum, quarum altera exceſſiva, altera defectiva.*

Sit quantitas excessiva $= a$, excessus ejus supra veram $= x$, & defectus defectivæ à vera $= y$: erit quantitas vera $= a - x$, & defectiva $= a - x - y$, quæ ablata ex excessiva $= a$, relinquit differentiam $x + y$.

Theorema. Differentia 2 quantitatum, quarum altera excessiva, altera defectiva, est ipsa summa excessus & defectus.

2. COROLLARIUM. Ablata itaque quantitate defectiva ex excessiva, relinquitur summa excessus & defectus, quam brevitatis causa voco etiam *ſummam* $x + y$.

PROBLEMA II.

3. *Determinare tam exceſſum, quàm defectum 2 quantitatum, quæ cum 3tia communi proportionaliter creſcunt, veluti peripheriæ cum diametro, lunulæ cum quadrato diametri &c. & quarum altera inventa fuit per rationem exceſſivam, altera per defectivam.*

Sit diameter $= a$, & peripheria excessiva $= b$: erit ratio exces. diametri ad periph. $= a : b$. Sit porro diameter $= d$, & periph. defect. $= e$: erit ratio defect. diametri ad periph. $= d : e$. Assumpta itaque diametro $= c$ pro 3tio termino utriusque proportionis, prodeunt peripheriæ $\frac{bc}{a}$ & $\frac{ec}{d} = \frac{dbc}{ad}$ & $\frac{aec}{ad} = \frac{db}{ad}$ & $\frac{ae}{ad}$, quarum posterior ablata ex priore relinquit summam $x + y = \frac{db - ae}{ad}$ (§. 2.). Sit jam hujus numerator $db - ae = d + a$, hoc est, sit ille conflatus ex utroque denominatore peripheriarum falsarum: quoniam unum æqualium alteri salva quantitate substitui potest: erit quantum $\frac{d + a}{ad}$ quoque summa excessus & defectus, & ejus numerator simul aggregatum ex utroque factore d & a denominatoris sui ad. Jam cum nullæ aliæ partes hanc summam ita constituere queant, ut ejus numerator constet ex utroque factore denominatoris sui, seu, quod idem est, ex utroque denominatore peripheriarum falsarum, nisi $1 : a$ & $1 : d$; palam est, alteram earum esse excessum, alteram defectum. Et quoniam peripheria exces. constat ex vera & excessu, & $1 : a$ est ejus pars homogenea, evidens est, hanc esse excessum, & alteram defectum.

Theorema. Si numerator summæ $x + y$ est aggregatum ex denominatoribus simplis peripheriarum (lunularum) excessivæ & defectivæ; necesse est, ut denominator excessus sit idem ac peripheriæ (lunulæ) excessivæ, denominator defectus idem ac defectivæ, & numerator utriusque unitas.

4. CO-

4. COROLLARIUM. Si numerator summæ $x + y$ est conflatus ex denominatore simplo peripheriæ (lunulæ) excessivæ, & multiplo defectivæ, h. e. ex uno denominatore excessivæ, & pluribus, quam uno defectivæ; designetur numerus hanc pluralitatem denominatorum indicans per m. Sit itaque summæ numerator $ab - ae$ (§. 3.) $= md + a$: erit quantitas $\frac{md + a}{ad}$ quoque summa excessus & defectus, cujus partes sunt igitur $\frac{md}{ad} = \frac{m}{a}$ & $\frac{a}{ad} = \frac{1}{d}$.

Theorema. Si numerator summæ $x + y$ est conflatus ex uno denominatore peripheriæ (lunulæ) excessivæ, & pluribus, quam uno defectivæ; debet numerus, hanc pluralitatem denominatorum indicans, esse numerator excessus, & unitas numerator defectus.

PROBLEMA III.

5. *Determinare rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO. 1.) Assumta diametro 8 pro 3tio termino cujusvis proportionis, quæratur per rationem excessivam quamcunque, modo non sit major, quàm $1 : 3\frac{1}{4}$, peripheria una, & per defectivam $1 : 3$ altera. 2.) Peripheria defectiva dematur ex excessiva, ut innotescat summa $x + y$. 3.) Ex numeratore hujus summæ auferatur denominator peripheriæ exces. & residuo subscribatur idem denominator, ita habebitur excessus, unitati autem subscribatur unitas, & prodibit defectus. 4.) Excessus auferatur ex periph. exces.; vel defectus addatur ad defectivam, ita patebit, diametrum esse ad quamlibet periph. hac methodo inventam, ut $8 : 25$.

DEMONSTRATIO. Per rationes $7 : 22$ & $1 : 3$ emergunt peripheriæ $\frac{176}{7}$ & $\frac{24}{1} = \frac{176}{7}$ & $\frac{168}{7}$, quæ ex se demtæ relinquunt summam $x + y = \frac{8}{7}$ (§. 2.), ex cujus numeratore denominator 7 peripheriæ exces. subductus relinquit 1; ex quo perspicuum est, numeratorem summæ constare ex 7 & 1, h. e. ex denominatore simplo 7 peripheriæ exces. & denominatore simplo $= 1$ defectivæ: unde (per §. 3.) excessus est $\frac{1}{7}$ & defectus $\frac{1}{1}$, consequenter peripheria vera $\frac{176}{7} - \frac{1}{7} = \frac{175}{7} = 25$; vel $\frac{24}{1} + \frac{1}{1} = \frac{25}{1} = 25$. Per rationes $71 : 130$ & $1 : 3$ oriuntur peripheriæ $\frac{1840}{71}$ & $\frac{24}{1} = \frac{1840}{71}$ & $\frac{1704}{71}$, quarum differentia exhibet summam $x + y = \frac{136}{71}$, ex cujus numeratore denominator 71 peripheriæ exces. ablatus, relinquit 65; ex quo liquet, numeratorem summæ esse conflatum ex 71 & 65, h. e. ex denominatore simplo 71 peripheriæ exces. & 65 denominatoribus $= 1$ defectivæ. Cum igitur residuum 65 sit numerus indicans pluralitatem denominatorum peripheriæ defect. subscribatur ei denominator excessivæ, ut prodeat excessus $\frac{65}{71}$; unitati autem subscribatur 1, h. e. denominator defectivæ, ut habeatur defectus $\frac{1}{1}$ (§. 4.). Ergo peripheria vera est $\frac{1840}{71} - \frac{65}{71} = \frac{1775}{71} = 25$; vel $\frac{24}{1} + \frac{1}{1} = \frac{25}{1} = 25$. Per rationes $113 : 367$ & $1 : 3$ nascuntur peripheriæ $\frac{2986}{113}$ & $\frac{24}{1} = \frac{2936}{113}$ & $\frac{2712}{113}$, quæ ex se ablatæ manifestant

sum-

summam $x + y = \frac{224}{113}$, ex cujus numeratore denominator 113 peripheriæ exces. demtus relinquit residuum 111. Ergo numerator summæ est aggregatum ex 113 & 111, h. e. ex denominatore simplo 113 peripheriæ exces. & ex 111 denominatoribus $= 1$ defectivæ: unde excessus est $\frac{111}{113}$ & defectus $\frac{1}{1}$, consequenter peripheria vera $\frac{2936}{113} - \frac{111}{113} = \frac{2825}{113} = 25$. Per rationes $100 : 313$ & $1 : 3$ prodeunt peripheriæ $\frac{2504}{100}$ & $\frac{24}{1} = \frac{2504}{100}$ & $\frac{2400}{100}$, quarum differentia sistit summam $x + y = \frac{104}{100}$, ex cujus numeratore denominator 100 peripheriæ exces. subductus, dat residuum 4. Ergo numerator summæ componitur ex 100 & 4, h. e. ex denominatore simplo 100 peripheriæ exces. & 4 denominatoribus $= 1$ defectivæ: adeoque excessus est $\frac{4}{100}$ & defectus $\frac{1}{1}$, consequenter peripheria vera $\frac{2504}{100} - \frac{4}{100} = \frac{2500}{100} = 25$. Jam cum per omnes rationes excessivas non majores, quàm $1 : 3\frac{1}{4}$, & defectivam communem $1 : 3$ peripheria diametri 8 *semper & sine ulla exceptione* demonstrativè reperiatur $= 25$, & ob similitudinem circulorum quævis diameter ad periph. suam eandem habeat rationem; palam est, diametrum quamcunque esse ad peripheriam suam $= 8 : 25$.

THEOREMA.

6. *Excessus & defectus peripheriarum falsarum per Problema præcedens legitimè determinantur.*

Demonstratio ocularis. Ut summa $x + y$ resolvi queat in partes homogeneas periph. falsarum, requiritur unicè, ut ejus numerator sit conflatus ex denominatore simplo periph. exces. & simplo, vel multiplo defectivæ. Huic conditioni autem differentia periph. falsarum diametri 8 semper facit satis. Quoniam itaque numerator 1mæ summæ $\frac{8}{7}$ est aggregatum ex utroque denominatore 7 & 1 periph. falsarum, palam est, partes ejus esse $\frac{7}{7}$ & $\frac{1}{7}$, quarum posterior est excessus quæsitus, & prior defectus; sed majoribus terminis expressus: nam per reductionem periph. ad eandem denominationem, termini excessus in periph. exces. contenti non variantur, quia denominator $= 1$ periph. defectivæ non multiplicat. Termini defectus autem per ductum periph. defectivæ in denominatorem excessivæ toties augentur, quoties in hoc denominatore continetur unitas: adeoque summa $x + y$ omnino constare debet ex excessu invariato, & defectu per denominatorem periph. exces. ad majores terminos reducto. Dividendo itaque hos terminos majores per eundem denominatorem, necessariò emergere debet defectus quæsitus. Cum itaque pars $\frac{7}{7}$ reducta per denominatorem 7 periph. exces. ad terminos minores sit $= \frac{1}{1}$; pars $\frac{1}{7}$ autem per denominatorem $= 1$ periph. defect. ad minores terminos reduci nequeat, necesse est, ut $\frac{1}{7}$, utpote pars homogenea periph. excessivæ, sit excessus, & $\frac{1}{1}$ ejusdem denominationis cum defectiva, defectus quæsitus: id quod etiam inde evidens est, quia nullæ aliæ partes summam $\frac{8}{7}$ ita constituere possunt, ut ejus numerator sit aggregatum ex denominatoribus 7 &

1 peripheriarum falsarum, nisi $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{1}$. 2.) Demto denominatore 71 periph. excessivæ ex numeratore 2dæ summæ $\frac{136}{71}$, remanent 65: ergo numerator ejus est conflatus ex denominatore simplo 71 periph. excessivæ, & 65 denominatoribus $=$ 1 defectivæ: unde summa ipsa est $= \frac{71}{71} + \frac{65}{71} = \frac{1}{1} + \frac{65}{71}$, consequenter excessus $\frac{65}{71}$, & defectus $\frac{1}{1}$. 3.) Subducto denominatore 113 periph. exces. ex numeratore 3tiæ summæ $\frac{224}{113}$, prodit residuum 111: ergo numerator ejus constat ex denominatore simplo 113. periph. exces. & ex 111 denominatoribus $=$ 1 defectivæ: adeoque summa ipsa est $= \frac{113}{113} + \frac{111}{113} = \frac{1}{1} + \frac{111}{113}$, consequenter excessus est $\frac{111}{113}$ & defectus $\frac{1}{1}$. 4.) Subtracto denominatore 100 periph. exces. à numeratore 4tæ summæ $\frac{104}{100}$, relinquitur residuum 4: ergo numerator ejus est compositus ex denominatore simplo 100, & 4 denominatoribus $=$ 1 periph. defect. hinc summa ipsa est $= \frac{100}{100} + \frac{4}{100} = \frac{1}{1} + \frac{4}{100}$, consequenter excessus $\frac{4}{100}$, & defectus $\frac{1}{1}$. Jam cum excessus & defectus hac methodo demonstrativa inventi, sint semper iidem, qui reperiuntur per Problema præcedens; manifestum est, per illud excessus & defectus legitimè determinari. Denique causa, cur excessus & defectus periph. falsarum diametri 8 sint semper earundem partes homogeneæ, est hæc: Diviso consequente rationis veræ per suum antecedentem, prodit quotus 3 cum $\frac{1}{8}$; jam verò divisis consequentibus rationum excessivarum §. 5ti per suos Antecedentes, emergit quotus 3 cum fractionibus $\frac{1}{7}$ $\frac{17}{71}$ $\frac{28}{113}$ $\frac{13}{100}$. Reducendo itaque quamlibet ad eandem denominationem cum $\frac{1}{8}$, & auferendo minorem à majori, relinquuntur excessus $\frac{1}{56}$ $\frac{65}{568}$ $\frac{111}{904}$ $\frac{4}{800}$. Jam cum excessus & defectus peripheriarum diametri 8 crescant in ratione octupla; necesse est, ut excessus peripheriæ 1mæ (§. 5.) sit $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$; 2dæ $\frac{520}{568} = \frac{65}{71}$; 3tiæ $\frac{888}{904} = \frac{111}{113}$; 4tæ $\frac{32}{800} = \frac{4}{100}$. Et quoniam ratio defectiva 1 : 3 deficit à vera $\frac{1}{8}$ parte; manifestum est, peripheriam diametri 8 per hanc rationem inventam in defectu peccare $\frac{8}{8}$ h. e. $\frac{1}{1}$. Ergo. Vel cum periph. sit diametri 3pla cum $\frac{1}{8}$, erit posita diametro $= a$, periph. $= 3a + \frac{1}{8}a$, quæ multiplicata per 8 manifestat periph. diam. $8a = 24a + \frac{8}{8}a = 25a$. Ergo quævis periph. ducta in 8 constat ex 25 diametris periph. multiplicatæ. Sit jam periph. exces. $= 3a + \frac{1}{7}a$: erit periph. exces. diametri $8a = 24a + \frac{8}{7}a$, quæ itaque in excessu peccat $\frac{1}{7}a$, quæ ablata ex $\frac{8}{7}$ relinquit periph. veram $24a + \frac{7}{7}a = 25a$, qua divisa per a, prodit peripheria diametri $8 = 25$.

7. COROLLARIUM. Posito denominatore periph. exces. $= a$: erit peripheria $\frac{25}{1}$, quæ per demonstrata est vera, reductione facta $= 25a : a$, qua ablata ex excessiva, relinquitur excessus solus. Auferendo autem ex eadem defectivam $25a - a : a$, relinquitur præter excessum adhuc defectus $a : a$ (§. 2.); ex quo palam est, numeratorem summæ cujusvis per rationem defect. 1 : 3, & excessivam quamcunque 4 : 17, 5 : 28 &c. inventæ, constare ex numeratore excessus & uno

uno a, h. e. ex multiplo denominatore periph. defect. & simplo excessivæ. Auferendo igitur ex numeratore summæ denominatorem $= a$ periph. exces. & scribendo sub residuo eundem denominatorem, necessariò prodire debet excessus; ex quo patet universalitas Problematis 3tii.

8. SCHOLION. *Frustra igitur asseritur, è solis 2 limitibus quantitatem incognitam (cum cognita in eadem ratione crescentem) nunquam posse determinari. Contrarium extemplò patebit ex 3 punctis sequentibus, quæ nemo in dubium voçare potest.* 1.) *Si ratio vera quadrati diametri ad lunulam nondum innotuisset; reperiretur ea demonstrativè hoc modo: Per rationem exces.* 33 : 10 *&* *defectivam* 5 : 1 *prodeunt, assumto diametri quadrato* 4 *pro* 3*tio termino proportionum, lunulæ falsæ* $\frac{40}{33}$ *&* $\frac{4}{5} = \frac{200}{165}$ *&* $\frac{132}{165}$ (en itaque limites, intra quos continetur lunula vera) *quarum differentia exhibet summam* $x + y = \frac{68}{165}$, *ex cujus numeratore denominator* 33 *lunulæ exces. ablatus, relinquit* 35: *ergo numerator summæ constat ex denominatore simplo* 33 *& ex* 7 *denominatoribus* $=$ 5 *lunulæ defect. consequenter summa ipsa est* $= \frac{33}{165} + \frac{35}{165}$. *Jam cum termini excessus ob multiplicationem integræ lunulæ exces. per* 5 *quinquies, & termini defectus per ductum integræ lunulæ defect. in* 33 *tricies ter fuerint aucti, opus est, per eosdem denominatores* 33 *&* 5 *partes* $\frac{33}{165}$ *&* $\frac{35}{165}$ *ad minores terminos* $\frac{1}{5}$ *&* $\frac{7}{33}$ *reducere, quarum posterior, utpote pars homogenea lunulæ exces. est excessus, & prior, ejusdem denominationis cum defectiva, defectus: adeoque lunula vera est* $\frac{40}{33} - \frac{7}{33} = \frac{33}{33} = 1$; *vel* $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$, *ad quam igitur quadratum diametri est, ut* 4 : 1. *Ergo.* 2.) *Per rationes* 7 : 2 *&* 13 : 3; 15 : 4 *&* 21 : 5; 23 : 6 *&* 29 : 7 *oriuntur lunulæ falsæ* $\frac{8}{7}$ $\frac{12}{13}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{20}{21}$ $\frac{24}{23}$ *&* $\frac{28}{29}$. *Jam cum per Theorema* Hippocratis *lunula respondens quadrato* 4, *sit* $= 1$; *patet ad oculum, lunularum excessivarum excessus esse* $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{23}$ *& defectivarum defectus* $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{21}$ $\frac{1}{29}$ *& quidem hanc ob causam, quia numerator cujuslibet summæ excessus & defectus constat ex denominatoribus simplis lunularum falsarum.* 3.) *Per rationes excessivas* 25 : 7, 27 : 8, 30 : 9 *& per defectivam communem* 5 : 1 *emergunt lunulæ exces.* $\frac{28}{25}$ $\frac{32}{27}$ $\frac{36}{30}$, *& defectiva communis* $\frac{4}{5}$; *ex quo denuo apparet ad oculum, excessus esse* $\frac{3}{25}$ $\frac{5}{27}$ $\frac{6}{30}$ *& defectum communem* $\frac{1}{5}$, *quorum causa est hæc, quia numerator cujusvis summæ est conflatus ex denominatore simplo lunulæ exces. & multiplo defectivæ, nempe numerator* 1*mæ summæ ex* 3, 2*dæ ex* 5, *&* 3*tiæ ex* 6 *denominatoribus* $=$ 5 *lunulæ defectivæ. Ergo de veritate Theorematum præcedentium dubitare non licet. Ergo & ratio diametri ad periph.* $= 8 : 25$ *ope eorum inventa & demonstrata, extra omnem dubitationis aleam est posita: id quod nemo nisi invidiæ veneno suffusus inficiabitur.*

9. COROLLARIUM. Posita diametro $= a$, & peripheria $= p$, prodit ratio quadrati diametri ad circulum $= aa : \frac{ap}{4} = 4a : p$, & cubi

 diame-

diametri ad sphæram $= aaa : aap : 6 = 6\,a : p$. Jam cum diameter sit ad periph. ut $8 : 25$; palam est, quadratum diametri esse ad circulum, ut $32 : 25$, & cubum diametri ad sphæram, ut $48 : 25$.

PROBLEMA IV.

10. *Determinare rationem diametri ad peripheriam aliter.*

RESOLUTIO. 1.) Ratio excessiva diametri ad periph. quæcunque, non major tamen quàm $1 : 3\frac{1}{4}$, multiplicetur per 8, si ejus Antecedens non est divisibilis per hunc numerum, & consequenti novo per hanc multiplicationem orto subscribatur Antecedens novus, ut habeatur peripheria exces. respondens diametro 1; consequenti autem rationis defectivæ $8 : 24$ subscribatur ejus Antecedens, ut prodeat peripheria defectiva. 2.) Ambæ peripheriæ inventæ subtrahantur à se invicem, ut relinquatur earundem summa excessus & defectus. 3.) Ex numeratore hujus summæ dematur denominator peripheriæ exces. & residuo subscribatur denominator communis; idem denominator subscribatur etiam denominatori peripheriæ exces. quo facto prodibunt excessus & defectus, sed majoribus terminis expressi. 4.) Hi termini majores reducantur ad minores per denominatores peripheriarum falsarum, ita prodibunt partes quæsitæ, quarum ea, quæ est ejusdem denominationis cum periph. exces. est excessus, & altera defectus; ablato deinde priore ex periph. exces. vel addito posteriore ad defectivam, prodit peripheria vera semper $= \frac{25}{8}$.

E. gr. Per rationem excessivam $100 : 325 = 800 : 2600$, & defectivam $8 : 24$ prodeunt, posita diametro $= 1$, peripheriæ $\frac{2600}{800}$ & $\frac{24}{8} = \frac{20800}{6400}$ & $\frac{19200}{6400}$, quarum differentia sistit summam excessus & defectus $= \frac{1600}{6400}$, ex cujus numeratore denominator 800 peripheriæ excessivæ subductus dat residuum 800, cui subscribendo denominatorem communem 6400, prodit una pars nempe $\frac{800}{6400}$; subscribendo autem denominatori 800 periph. exces. eundem denominatorem communem, oritur pars altera $\frac{800}{6400}$. Reductis deinde hisce partibus ad minores terminos per denominatores 8 & 800 peripheriarum falsarum, emergunt æquivalentes $\frac{100}{800}$ & $\frac{1}{8}$, quarum prior est excessus & posterior defectus, consequenter peripheria vera $\frac{2600}{800} - \frac{100}{800} = \frac{2500}{800} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{24}{8} + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$.

DEMONSTRATIO. Ratio, cujus Antecedens non est divisibilis per 8, ideò per hunc numerum multiplicatur, ut excessus evadat pars homogenea periph. exces.; ex Proportionum scientia autem constat, æqualitatem rationum non tolli, per quemcunque numerum eæ multiplicentur; 2dum punctum resolutionis patet (ex §. 2.); 3tium & 4tum autem ita demonstratur. Quoniam ablato denominatore 800 periph. exces. ex numeratore summæ $\frac{1600}{6400}$, remanent 800; palam est, hunc numeratorem esse conflatum ex denominatore 800 periph. exces. & adhuc ex 800, h. e. ex 100 denominatoribus $= 8$ peripheriæ defectivæ: ergo summa $\frac{1600}{6400}$ est $= \frac{800}{6400} + \frac{800}{6400}$. Jam cum termini excessus in

peri-

peripheria excessiva $\frac{2600}{800}$ contenti ob ejus reductionem ad denominatorem 6400 per denominatorem 8 peripheriæ defect. octies, & termini defectus ob multiplicationem integræ periph. defect. per denominatorem 800 periph. exces. octingentis vicibus fuerint aucti; opus est, per eosdem denominatores 8 & 800 partes $\frac{800}{6400}$ & $\frac{800}{6400}$ ad minores terminos reducere, ut prodeant æquivalentes $\frac{100}{800}$ & $\frac{1}{8}$, quarum prior, quæ est pars homogenea peripheriæ exces. necessarió debet esse excessus, & posterior utpote ejusdem denominationis cum defectiva, defectus quæsitus, siquidem nullæ partes summam $\frac{1600}{6400}$ ita producere possunt, ut ejus numerator sit aggregatum ex denominatore simplo 800 peripheriæ excessivæ & 100 denominatoribus $=$ 8 peripheriæ defectivæ nisi $\frac{100}{800}$ & $\frac{1}{8}$. Jam cum excessus & defectus cujuslibet summæ inventæ per rationem defectivam communem 8 : 24 & excessivam pro libitu assumtam, modo non sit major quàm 1 : $3\frac{1}{4}$, per hoc Problema, assumta diametro $=$ 1, legitimè possint determinari, & ablatis prioribus ex peripheriis excessivis, vel additis posterioribus ad defectivas. peripheria vera diametri $=$ 1, semper prodeat $= \frac{25}{8}$; evidens est diametrum esse ad peripheriam, ut 1 : $\frac{25}{8}$ $=$ 8 : 25.

PROBLEMA V.

11. *Determinare rationem. quadrati diam. ad Circulum.*

RESOLUTIO. 1.) Assumto dimidio quadrato 32 diametri 8 pro 3tio termino cujusvis proportionis, quæratur per rationem exces. quadrati diametri ad Circulum quamcunque, modo non sit major, quàm 16 : 13, semicirculus excessivus, & per defectivam $=$ 4 : 3 semicirculus defectivus $\frac{96}{4}$, qui reductus ad terminos minimos est $= \frac{24}{1}$. 2.) Semicirculus defect. $\frac{24}{1}$ subtrahatur à semicirculo exces. ut innotescat summa $x + y$. 3.) Ex numeratore hujus summæ auferatur denominator semicirculi exces. & residuo subscribatur idem denominator, ita habebitur excessus, unitati autem subscribatur unitas, & prodibit defectus; ablato deinde priore ex semicirculo exces. vel addito posteriore ad semicirculum defect. patebit, dimidium quadratum 32 esse ad semicirculum quemcunque hac methodo inventum ut 32 : 25.

E. gr. Semicirculus per rationem 400 : 325 inventus, est $\frac{10400}{400}$ & defectivus, ut jam innui $\frac{24}{1} = \frac{9600}{400}$, qui ablatus ex priore exhibet summam $x + y = \frac{800}{400}$ (§. 2.), ex cujus numeratore denominator 400 semicirculi exces. ablatus relinquit 400. Subscribendo igitur huic residuo denominatorem 40 semicirculi exces. prodit excessus $\frac{400}{400}$; subscribendo deinde unitati unitatem, emergit defectus $\frac{1}{1}$. Ergo semicirculus verus est $\frac{10400}{400} - \frac{400}{400} = \frac{10000}{400} = 25$; vel $\frac{24}{1} + \frac{1}{1} = \frac{25}{1} = 25$ &c.

DEMONSTRATIO. Ablato denominatore 400 semicirculi excessivi ex numeratore summæ $\frac{800}{400}$, remanent 400: Ergo hic numerator est conflatus ex denominatore simplo 400 semicirculi exces. & 400 denominatoribus $=$ 1 semicirculi defect. adeoque summa ipsa est $= \frac{400}{400}$ $+ \frac{400}{400}$.

† $\frac{400}{400}$. Jam cum termini defectus semicirculi defect. $\frac{24}{1}$ per ejus reductionem ad denominatorem 400 quadringentis vicibus fuerint aucti, termini excessus autem ne semel quidem, quia unitas non multiplicat; necesse est, unam priorum partium per eundem denominatorem 400 reducere ad terminos minimos, ut emergat $\frac{1}{1}$. Ergo summæ $x \dagger y$ partes quæsitæ sunt $\frac{400}{400}$ & $\frac{1}{1}$, quarum prior, quæ est pars homogenea semicirculi exces. est excessus, & posterior defectus: adeoque semicirculus verus est $\frac{10400}{400} - \frac{400}{400} = \frac{10000}{400} = 25$; vel $\frac{24}{1} \dagger \frac{1}{1} = \frac{25}{1} = 25$, & dimidium quadratum diametri ad semicirculum quemcunque hac methodo determinatum, ut 32 : 25. Jam cum valeat proportio : ut dimidium quadratum diametri ad semicirculum, ita quadratum integrum ad circulum integrum; palam est, quadratum diametri cujuscunque esse ad circulum, ut 32 : 25. Ergo etiam diameter est ad peripheriam, ut 8 : 25 (§. 9.).

PROBLEMA VI.

12. *Determinare rationem quadrati diametri ad segmentum, quod est complementum lunulæ ad semicirculum.*

RESOLUTIO. Assumto diametri quadrato 64 pro 3tio termino cujusvis proportionis, quæratur per rationem exces. quadrati diam. ad segmentum quamcunque, modo non sit major, quam 32 : 5, segmentum exces. & per rationem defect. 8 : 1 segmentum defect. quod itaque erit $\frac{64}{8} = \frac{8}{1}$. Reliqua peragantur ut ante. E. gr. Segmentum per rationem exces. 200 : 31 repertum, est $\frac{1984}{200}$ & defectivum $\frac{8}{1} = \frac{1600}{200}$, quod subductum ex excessivo manifestat summam $x \dagger y = \frac{384}{200}$, ex cujus numeratore denominator 200 segmenti exces. ablatus, relinquit residuum 184, cui subscribendo denominatorem 200 segmenti excessivi prodit excessus $\frac{184}{200}$, qui ablatus ex segmento excessivo relinquit verum $\frac{1800}{200} = 9$.

DEMONSTRATIO. Quoniam ablato denominatore 200 segmenti exces. ex numeratore summæ $x \dagger y$, remanent 184; palam est, ipsum constare ex denominatore 200 segmenti exces. & 184 denominatoribus = 1 defectivi, consequenter summam ipsam esse $= \frac{200}{200} \dagger \frac{184}{200}$. Jam cum termini defectus ob reductionem segmenti defect. ad denominatorem 200 ducenties fuerint aucti; opus est, eos per eundem denominatorem 200 iterum dividere, ut prodeat defectus quæsitus $\frac{1}{1}$. Jam verò termini excessus manserunt invariati, quia denominator = 1 non multiplicat: unde altera pars $\frac{184}{200}$ est excessus, consequenter segmentum verum $\frac{1984}{200} - \frac{184}{200} = \frac{1800}{200} = 9$; vel $\frac{8}{1} \dagger \frac{1}{1} = \frac{9}{1} = 9$. Et quoniam excessus & defectus segmentorum falsorum (ex qualibet summa inventa per rationem defect. 8 : 1, & excessivam pro arbitrio assumtam, non majorem tamen, quam 32 : 5) legitimè determinantur, & ope eorum segmentum verum semper prodit = 9; evidens est, quadratum diametri cujuscunque esse ad segmentum, ut 64 : 9. Ex quo denuo legitimè inferri potest, diametrum esse ad periph. ut 8 : 25.